Übungen zur Vorlesung „Höhere Numerische Mathematik“

Übungsblatt 1 , Abgabe: 13.04.2007 , 8.00 Uhr

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Bestimmen Sie für die Matrizen

(a) $A = uv^T, \quad u, v \in \mathbb{R}^n,$

(b) $Q = I - 2ww^T, \quad w^T w = 1, \quad w \in \mathbb{R}^n,$

(c)
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

die Eigenwerte λ_i und die Vielfachheiten $\sigma(\lambda_i)$ und $\rho(\lambda_i)$ des charakteristischen Polynoms $\varphi(\lambda)$.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Sei A die (n, n)-Matrix mit

$$a_{i,i} = 2, \quad i = 1, \dots, n, \qquad a_{i+1,i} = a_{i,i+1} = -1, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Alle anderen Elemente von A seien 0 (vgl. Aufgabe 10, Einführung in die Numerische Mathematik). Zeigen Sie, dass A die folgenden Eigenwerte hat:

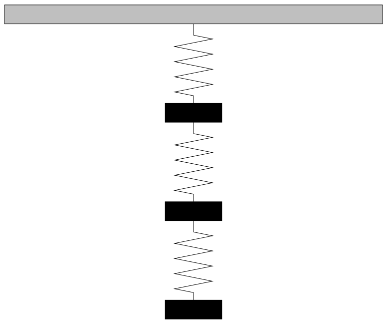
$$\lambda_\ell = 4 \sin^2 \left(\frac{\ell \pi}{2n+2} \right), \quad \ell = 1, \dots, n.$$

Hinweis: Machen Sie für einen Eigenvektor $x \in \mathbb{R}^n$ den Ansatz $x_i = \sin(ci)$, $i = 1, \dots, n$ und bestimmen Sie c. Benutzen Sie das Additionstheorem für den Sinus.

Aufgabe 3: (2 Punkte)
Sei A eine reelle, reguläre und symmetrische (n, n)-Matrix und X eine symmetrische und positiv definite (n, n)-Matrix. Zeigen Sie: XAX hat die gleiche Anzahl positiver Eigenwerte wie A.

Hinweis: Betrachten Sie für $s \in [0, 1]$ $X(s) := E_n + s(X - E_n)$ und überlegen Sie sich das Vorzeichen der Eigenwerte der Matrix $X(s)AX(s)$.

Aufgabe 4: (Programmieraufgabe, Abgabe 13.04.07, 4 Punkte)
Bei der Berechnung der Grundfrequenzen und Schwingungsformen eines linearen Schwingungssystems der Form:



stellt sich die Aufgabe der Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix

$$A = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

mit $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$.

(a) Berechnen Sie für $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit Hilfe der Potenzmethode 4 Iterationen zur Bestimmung des größten Eigenwertes von A.

(b) Bestimmen Sie für $c_1 = 8$, $c_2 = 3$, $c_3 = 11$ den größte Eigenwert und zugehörigen Eigenvektor der Matrix A. Benutzen Sie a) zur Berechnung einer Näherung und vergleichen Sie die Resultate. Erklären Sie insbesondere die schlechte Konvergenz des Eigenvektors.

Übungstermine (ab Montag, 16.4.2007):

Gruppe 1:	Mo.	8.00 - 10.00 Uhr	SR 1	BK 83
Gruppe 2:	Mo.	10.00 - 12.00 Uhr	SR 1	BK 83
Gruppe 3:	Mo.	12.00 - 14.00 Uhr	SR 1	BK 82

Bitte geben Sie die Nummer Ihrer Gruppe auf den abzugebenden Lösungen der Übungsaufgaben an.

Informationen zu der Vorlesung, wie z.B. die aktuellen Übungsaufgaben, Klausurtermine etc., finden Sie unter

`http://wwwmath1.uni-muenster.de/num/Vorlesungen/Numerik2_SS07/`

Übungen zur Vorlesung „Höhere Numerische Mathematik“

Übungsblatt 2 , Abgabe: 20.04.2007 , 8.00 Uhr

Aufgabe 5: (6 Punkte)
Sei

$$A = \begin{pmatrix} \delta_1 & \gamma_2 & & & \mathbf{O} \\ \gamma_2 & \delta_2 & \gamma_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \gamma_n \\ \mathbf{O} & & & \gamma_n & \delta_n \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie: λ ist Eigenwert von A genau dann, wenn $-\lambda$ Eigenwert von B ist:

$$B := \begin{pmatrix} -\delta_1 & \gamma_2 & & & \mathbf{O} \\ \gamma_2 & -\delta_2 & \gamma_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \gamma_n \\ \mathbf{O} & & & \gamma_n & -\delta_n \end{pmatrix}$$

<u>Hinweis:</u> Betrachten Sie die 3-Term-Rekursion für das charakteristische Polynom.

(b) Es gelte

$$\begin{aligned} \delta_i &= -\delta_{n+1-i} && (i = 1, \ldots, n) \,, \\ \gamma_i &= \gamma_{n+2-i} && (i = 2, \ldots, n) \,. \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Mit λ ist auch $-\lambda$ Eigenwert von A.

(c) Es gelte

$$\begin{aligned} \delta_i + \delta_{n+1-i} &= 2c \quad , \quad c \in \mathbb{R} && (i = 1, \ldots, n) \,, \\ \gamma_i &= \gamma_{n+2-i} \quad , && (i = 2, \ldots, n) \,. \end{aligned}$$

Was kann man über die Lage der Eigenwerte von A aussagen?

Aufgabe 6: (4 Punkte)
Zeigen Sie: Die QR-Zerlegung einer invertierbaren $(n \times n)$-Matrix ist eindeutig bis auf Multiplikation mit einer Diagonalmatrix D mit $|D_{ii}| = 1$, $i = 1, \ldots, n$, d.h. falls $A = QR = Q'R'$, so gilt $Q' = QD$ und $R = DR'$.

Aufgabe 7: (Programmieraufgabe, Abgabe 20.04.07, 4 Punkte)
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 16 & -104 \\ 0 & 2 & -12 & 42 \\ 0 & 9 & -16 & 105 \\ 1 & -2 & 13 & -42 \end{pmatrix} \quad , \quad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

(a) Erweitern Sie das Programm zu Aufgabe 4 zu einem Programm `potenzmethode(A,n,x0,epsilon)`, welches eine $(n \times n)$-Matrix A, die Dimension n, einen Startvektor $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und eine Fehlertoleranz ϵ einliest und mit Hilfe der Potenzmethode den betragsmässig größten Eigenwert λ_1 der Matrix A und den zugehörigen Eigenvektor x berechnet. Die Genauigkeit ϵ ist erreicht, wenn die Differenz zweier aufeinander folgender Iterationen für den Eigenwert λ_1 im Absolutbetrag kleiner als ϵ ist. Berechnen Sie mit dem Programm eine Näherung für den betragsmässig größten Eigenwert der Matrix A mit zugehörigem Eigenvektor.

(b) Benutzen Sie die inverse Potenzmethode zur Berechnung des zweitgrößten Eigenwertes mit zugehörigem Eigenvektor. Verwenden Sie $\mu = 10$ und $x^{(0)} = (1, 1, 1, 1)^T$.

Aufgabe 8: (Programmieraufgabe, Abgabe 27.04.07, 4 Punkte)
Man berechne sämtliche Eigenwerte λ_i und Eigenvektoren x_i der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 16 & 1 & & & \mathbf{O} \\ 1 & 12 & 1 & & \\ & 1 & 8 & 1 & \\ & & 1 & 4 & 1 \\ \mathbf{O} & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe der in der Vorlesung dargelegten Methode und dem Verfahren von MAEHLY.
<u>Hinweis:</u> Nach Aufgabe 5 liegen die Eigenwerte symmetrisch zu $\lambda_3 = 8$.

Prof. Dr. H. Maurer, Dipl. Math. Maike Schulte SS 07

Übungen zur Vorlesung „Höhere Numerische Mathematik“

Übungsblatt 3 , Abgabe: 27.04.2007 , 8.00 Uhr

Aufgabe 9: (3 Punkte)
Führen Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

durch eine Ähnlichkeitstransformation unter Verwendung einer Elementarmatrix L in eine Hessenberg-Matrix H über. Geben Sie H explizit an.

Aufgabe 10: (4 Punkte)
Sei A eine reelle symmetrische $(n \times n)$-Matrix mit den Eigenwerten $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ und den Eigenvektoren $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$ mit $x_i^T x_k = \delta_{ik}$.
Man zeige:

$$\lambda_j = \max_{y \in \mathbb{R}^n} \{ y^T A y \mid y^T y = 1 \ , \ x_i^T y = 0 \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, j-1 \} \ .$$

Hinweis:
Betrachten Sie die Entwicklung von y nach den Eigenvektoren x_i, $i = 1, \ldots, n$.

Aufgabe 11: (4 Punkte)
Rechnen Sie einen Schritt des QR-Verfahrens für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

(a) ohne Shift,

(b) mit Shift $\quad s = s_1 = 1$.

(c) Vergleichen Sie in einer Tabelle die exakten Eigenwerte mit den approximierten Eigenwerten aus (a) und (b) für $\varepsilon = \frac{1}{10}$.

Aktuelle Hinweise zur Vorlesung:

Aufgrund der hohen Teilnehmerzahl wurde eine zusätzliche Übungsgruppe eingerichtet. Es werden insgesamt folgende Übungen angeboten:

Montag	8.00 - 10.00 Uhr	SR 1	BK 83	Vitali Gretschko
Montag	10.00 - 12.00 Uhr	SR 1	BK 83	Vitali Gretschko
Montag	10.00 - 12.00 Uhr	SR 0	BK 87	Marzena Franek
Montag	12.00 - 14.00 Uhr	M3	BK 82	Hendrik Halbach

Bitte beachten Sie, dass die Übungsgruppe von Hendrik Halbach ab sofort im M3 statt finden wird! Da die bisherigen Übungsgruppen mit bis zu 30 angemeldeten Teilnehmern sehr voll sind, wird empfohlen, auf den Zusatztermin von Marzena Franek auszuweichen (dies gilt insbesondere für die Übungsgruppe von Hendrik).

Klausurtermin:
Mittwoch, den 4.7.2007 von 13:00 - 16:00 Uhr, Hörsäle M1 und M2.

Programmierstunde:
Die Programmierstunde findet in dieser Woche nicht wie gewohnt dienstags sondern am Mittwoch (25.4.) von 16:15 bis 17:45 Uhr statt. Lösungen zu den Programmieraufgaben sind ab sofort auf der Vorlesungshomepage verfügbar.

Übungen zur Vorlesung „Höhere Numerische Mathematik“

Übungsblatt 4 , Abgabe: 04.05.2007 , 8.00 Uhr

Aufgabe 12: (4 Punkte)
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -2 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} .$$

(a) Zeigen Sie mit dem Satz von Gerschgorin, dass A genau einen Eigenwert mit negativem Realteil hat.

(b) Bestimmen Sie drei paarweise disjunkte Gerschgorin-Kreisscheiben, in denen jeweils ein Eigenwert von A liegt.

(c) Geben Sie eine möglichst gute Abschäzung für den größten Eigenwert.

Hinweis zu b) u. c): Betrachten Sie $A' = D^{-1}AD$ mit $D = \mathrm{diag}(1, c, 1)$, $c > 0$.

Aufgabe 13: (6 Punkte)
Gegeben sei die $(n \times n)$-Matrix

$$C(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \mathbf{O} \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ \mathbf{O} & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

und die $(n \times n)$–Matrix F.
Zeigen Sie: Für die Eigenwerte $\lambda_i(\epsilon)$ der gestörten Matrix $C(\lambda) + \epsilon F$ gilt für genügend kleines ϵ die Abschätzung

$$|\lambda_i(\epsilon) - \lambda| \leq |\epsilon^{1/n}|(1 + \|F\|_\infty) .$$

Zeigen Sie durch spezielle Wahl der Matrix F, dass der Fall $\lambda_i(\epsilon) - \lambda = O(\epsilon^{1/n})$ tatsächlich auftritt.
Hinweis: Ähnlichkeitstransformation mit $D = \mathrm{diag}\ (1, d, d^2, \ldots, d^{n-1})$, $d = \epsilon^{1/n}$. Benutzen Sie den Satz von Gerschgorin.

Aufgabe 14: (6 Punkte)
Überlegen Sie, dass die folgenden Ausdrücke Normen für die $\mathbb{R}$-Vektorräume V sind und entscheiden Sie dann, welche dieser Normen streng sind.

(a) $V = C^1[a,b]\ ;\ \|f\| = \left(\int\limits_a^b f'(x)^2 dx\right)^{1/2} + \max\limits_{a \le x \le b} |f(x)|$

(b) $V = C^2[a,b]\ ;\ \|f\| = \left(\int\limits_a^b f''(x)^2\, dx\right)^{1/2} + |f(a)| + |f(b)|$

(c) $V = C^n[a,b]\ ;\ \|f\| = \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \int\limits_a^b f^{(k)}(x)^2 dx\right)^{1/2}$

(d) $V = \left\{(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \mid x_1 = 0\ ,\quad \sum\limits_{k=0}^{\infty} |x_{k+1} - x_k| < \infty\right\}\ ;\ \|x\| = \sum\limits_{k=0}^{\infty} |x_{k+1} - x_k|$

Aufgabe 15: (Programmieraufgabe, Abgabe 11.05.2007, 4 Punkte)
Auf der Homepage zur Vorlesung finden Sie bei den Übungsaufgaben einen Link auf die Datei "C.matrix". Die Datei enthält eine 80×80-Matrix C. Programmieren Sie den QR-Algorithmus und testen Sie ihn, indem Sie alle Eigenwerte der Matrix C berechnen. Wie kann man eine geeignete Abbruchbedingung für den Algorithmus formulieren?

Hinweis: Sie können die QR-Zerlegung `qr` von Matlab benutzen. Speichern Sie die Datei `C.matrix` auf Ihren Rechner und laden Sie sie durch den Befehl `C=load C.matrix;` in Ihr Matlab-File.

Hinweis: Die nächste Programmierstunde findet am Dienstag, den 8. Mai statt!

Prof. Dr. H. Maurer, Dipl. Math. Maike Schulte SS 07

Übungen zur Vorlesung „Höhere Numerische Mathematik“

Übungsblatt 5 , Abgabe: 11.05.2007 , 8.00 Uhr

Aufgabe 16: (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass der Raum $C[a,b]$ bezüglich der Normen $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_1$ *nicht* vollständig ist. Untersuchen Sie dazu die Konvergenz der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{für} \quad -1 \le x \le -\frac{1}{n} \,, \\ nx & \text{für} \quad -\frac{1}{n} \le x \le \frac{1}{n} \,, \\ 1 & \text{für} \quad \frac{1}{n} \le x \le 1 \,. \end{cases}$$

Aufgabe 17: (4 Punkte)
Betrachten Sie in $V = C[0,1]$ mit der Norm $\|\cdot\|_\infty$ die Teilmenge

$$T = \{u \in C[0,1] \mid u(0) = 0\} \,.$$

Zeigen Sie, dass die Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $u_n(x) = x^n$, eine Minimalfolge für das Element $v \in V$ mit $v(x) \equiv 1$ ist, welche <u>nicht</u> gegen ein Element aus T konvergiert.

Aufgabe 18: (4 Punkte)

(a) In dem normierten Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ sei $B = \{u \in V \mid \|u\| \le 1\}$ die abgeschlossene Einheitskugel. Man zeige, dass <u>ein</u> Proximum $\tilde{u} \in B$ an ein Element $v \in V$ gegeben ist durch

$$\tilde{u} = \left\{ \begin{array}{ccc} v & , & \text{falls} \quad v \in B \\ v/\|v\| & , & \text{falls} \quad v \notin B \end{array} \right\} .$$

(b) Sei $V = \mathbb{R}^2$ versehen mit der Norm $\|x\|_1 := |x_1| + |x_2|$. Skizzieren Sie die Menge $B = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_1 \le 1\}$ und bestimmen Sie <u>alle</u> Proxima $\tilde{x} \in B$ an $v = (2,0)^T$ und $v = (1,1)^T$.

Prof. Dr. H. Maurer, Dipl. Math. Maike Schulte SS 07

Übungen zur Vorlesung „Höhere Numerische Mathematik“

Übungsblatt 6 , Abgabe: 18.05.2007 , 8.00 Uhr

Aufgabe 19: (4 Punkte)
In $(C[-1,1], \| \cdot \|_2)$ sei die Folge

$$f_n(x) = \left(\frac{n}{1+n^4x^2} \right)^{1/2}$$

gegeben. Zeigen Sie, daß die Folge im Mittel gegen $f(x) \equiv 0$ konvergiert; jedoch konvergiert sie nicht punktweise.

Aufgabe 20: (4 Punkte)
Sei $f \in C[-1,1]$, $f(x) = \sin(\pi x)$. Man bestimme die Proxima an f aus Π_k, $0 \leq k \leq 2$, bezüglich der Norm $\| \cdot \|_2$

(a) über die Normalgleichungen;

(b) durch Entwickeln von f nach LEGENDRE-Polynomen.

Aufgabe 21: (4 Punkte)
Die periodische Funktion $f \in C(\mathbb{R})$ sei definiert durch periodische Fortsetzung von $f(x) = x^2$ für $x \in [-\pi, \pi]$. Berechnen Sie die FOURIER-Entwicklung von f und skizzieren Sie den Verlauf der Proxima aus span (u_0, u_1, u_2) und span $(u_0, u_1, u_2, u_3, u_4)$.

Aufgabe 22: (4 Punkte)
Für reellwertige Funktionen $f, g \in C[-n, n]$ mit $n \in \mathbb{N}^+$ sei das innere Produkt definiert durch

$$(f,g) := \sum_{k=-n}^{n} f(k)g(k) \; .$$

Bestimmen Sie ein System $\{p_0, p_1, p_2\}$ orthonormierter Polynome bezüglich $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ mit $p_i \in \Pi_i \quad (i = 0, 1, 2)$.

Übungen zur Vorlesung „Höhere Numerische Mathematik“

Übungsblatt 7 , Abgabe: 25.05.2007 , 8.00 Uhr

Aufgabe 19: (4 Punkte)
Sei $V = C[-1,1]$ versehen mit dem inneren Produkt

$$(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)x^2 dx$$

und der Norm $\|f\|_2 = \sqrt{(f,f)}$.
Berechnen Sie eine Orthonormalbasis von $\Pi_2 = \text{span}\{1, x, x^2\}$ und bestimmen Sie das Proximum von x^4 in Π_2. Skizzieren Sie das Proximum und die Funktion x^4.

Aufgabe 20: (4 Punkte)
Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - k^2 \cos^2(\varphi)} d\varphi$$

mit $k^2 = 0.84$. $(I = 4.60262252)$

(a) nach der zusammengesetzten Trapezregel mit $h = \pi/8$,

(b) nach der zusammengesetzten Simpsonregel mit $h = \pi/8$.

Hinweis: Betrachten Sie eine geeignete Transformation von $[0, 2\pi]$ auf $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Aufgabe 21: (4 Punkte)
Es ist

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx = \pi = 3.141592653589793\ldots .$$

Bestimmen Sie π näherungsweise, indem Sie für das angegebene Integral zwei Romberg-Schritte von Hand (mit dem Taschenrechner) ausführen (Schrittweiten $h_i = \frac{1}{2^i}, i = 0, 1, 2$).

Aufgabe 22: (Programmieraufgabe, Abgabe 8.6.2007, 4 Punkte)
Schreiben Sie ein Programm

$$\text{romberg } (f, a, b, relerr)$$

zur Romberg-Integration einer Funktion f in $[a, b]$. Das Programm soll abbrechen, wenn in der letzten Zeile des Romberg-Schemas zweimal hintereinander gilt

$$|T_{i,k} - T_{i,k-1}|/T_{ik} \leq relerr.$$

Es sollen $k = 4$ Spalten und mindestens $i = 4$ und höchstens $i = 10$ Zeilen des Romberg-Schemas berechnet werden. Ihr Programm soll mit der minimalen Zahl von Funktionsauswertungen auskommen. Testen Sie Ihr Programm für $relerr \leq 10^{-5}$ an den Beispielen:

(a) $$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\, dx = \pi \approx 3.141592653589793$$

(b) $$\int_0^{2/\pi} \sqrt{1 - k^2 \cos^2(\varphi)}\, d\varphi \approx 0.3917436582052818 \quad \text{für} \quad k^2 = 0.84$$

(c) $$\int_1^2 \frac{dx}{(x+0.05)^4} \approx 0.24925422405550246$$

(d) $$\int_0^1 x^{3/2} dx = 0.4$$

<u>Hinweis:</u> Die offene Programmierstunde findet am Dienstag, den 05.06.2007 statt.

Übungen zur Vorlesung „Höhere Numerische Mathematik“

Übungsblatt 8 , Abgabe: 08.06.2007 , 8.00 Uhr

Aufgabe 23: (4 Punkte)
Sei $w(x) = x^2$ und $x_k = -1 + \frac{2k}{n-1}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Bestimmen Sie für $n = 4$ eine Integrationsformel der Form

$$\tilde{I}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k f(x_k),$$

so dass Polynome vom Grad ≤ 3 auf dem Intervall $[-1, 1]$ mit der Gewichtsfunktion $w(x)$ exakt integriert werden.

Aufgabe 24: (4 Punkte)
Die Ableitung $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$ soll durch die Differenzenquotienten

(a) $T(h) = \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x))$

(b) $T(h) = \frac{1}{2h}(f(x+h) - f(x-h))$

berechnet werden. Bestimmen Sie $f'(1)$ nach (a) und (b) für $f(x) = e^x$ mittels Extrapolation zu den Schrittweiten $h_0 = 0.2$, $h_1 = 0.1$, $h_2 = 0.05$.

Aufgabe 25: (4 Punkte)
Die (zusammengesetzte) Mittelpunktsregel lautet:

$$M_h = h \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k + \frac{h}{2}), \quad x_k = a + kh, \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

Zeigen Sie: Ist $f \in C^2[a, b]$, so gilt die Abschätzung

$$|M_h - I| \leq \frac{b-a}{24} h^2 \operatorname*{Max}_{[a,b]} |f''(x)|.$$

Aufgabe 26: (4 Punkte)
Berechnen Sie für $n = 2, 3$ das Integral

$$I(f) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2} dx$$

mit der Formel von Gauß-Legendre mit der Gewichtsfunktion $\omega(x) = 1$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der exakten Lösung.

Übungen zur Vorlesung „Höhere Numerische Mathematik“

Übungsblatt 9 , Abgabe: 15.06.2007 , 8.00 Uhr

Aufgabe 27: (4 Punkte)
Die AWA

$$y' = f(x)g(y)\ , \qquad y(x_0) = y_0$$

mit stetigen Funktionen f, g kann gelöst werden durch Integration der formalen Beziehung $dy/g(y) = f(x)dx$ zu

$$\int_{y_0} \frac{dy}{g(y)} = \int_{x_0} f(x)dx \qquad (g(y_0) \neq 0)\ .$$

Berechnen Sie hiermit die Lösung der folgenden AWA unter Angabe des maximalen Existenzintervalls.

(a) $\quad y' = ky^2 \quad , \quad y(0) = y_0 \qquad (k > 0)$

(b) $\quad y' = \frac{2x}{y+yx^2}\ , \quad y(2) = 3.$

Aufgabe 28: (4 Punkte)

(a) Transformieren Sie das DGL-System

$$\begin{aligned} u'' + u'v' + tv' \sin(u^2) &= 0, \\ v'' + tuv + v^3 \cos(u') &= 0 \end{aligned}$$

in ein äquivalentes System 1. Ordnung der Form $\dot{y} = f(t, y)$. Dabei bezeichne

$$\begin{aligned} u' &= \frac{du}{dt} \\ v' &= \frac{dv}{dt}. \end{aligned}$$

(b) Bestimmen Sie durch Überlegung die eindeutig bestimmte Lösung der AWA

$$\begin{aligned} y'(x) &= (x^2 + 1)\tan(y(x))(y(x)^2 - 1), \\ y(0) &= -1. \end{aligned}$$

Aufgabe 29: (Programmieraufgabe, Abgabe: **Dienstag 26.06.2007**, 8 Punkte)
Die Lösung $y(x) = (y_1(x), \ldots, y_n(x))^T$ der AWA

$$y'(x) = f(x, y)\ , \qquad y(x_0) = y_0 \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

soll im Intervall $[x_0,\, x_e]$ in den Punkten

$$\begin{array}{rcl} x_i & := & x_0 + i \cdot h \ , \quad i = 1, \ldots, m, \\ h & := & (x_e - x_0)/m \end{array}$$

berechnet werden. Das zugehörige Hauptprogramm soll die beiden folgenden Unterprogramme benutzen:

(1) `f(n,x,y,dy)`:

- x: unabhängige Variable,
- y: n-Vektor der abhängigen Variablen,
- dy: Feld der Länge n;
  dy enthält bei Verlassen der Routine die Werte $f(x, y)$ der rechten Seite der Dgl. (1)

(2) `integ(n,x,h,y)`:

- x: unabhängige Variable,
- h: Schrittweite,
- y: n-Vektor der abhängigen Variablen;
  y enthält beim Aufruf der Routine den Wert der Lösung im Punkte x und beim Verlassen den Wert der Lösung im Punkte $x + h$.

Es sollen drei verschiedene `integ` Routinen programmiert werden, `integ` bedeute wahlweise das

(a) EULER-Verfahren,
(b) das modifizierte EULER-Verfahren,
(c) das RUNGE-KUTTA-Verfahren.

Man teste das Programm an folgenden AWA'n:

AWA 1:

$$\begin{array}{rclcrcll} y' & = & x + y & , & y(0) & = & 1 & , \\ x_0 & = & 0 & , & x_e & = & 1 & , \quad m = 1, 2, 4, 8 \end{array}$$

exakte Lösung: $y(x) = 2e^x - (1 + x)$.

AWA 2: Räuber-Beute-Modell:

$$\begin{array}{rclcrcll} \dot{x} & = & 10x(1 - y) & , & x(0) & = & 3, & \\ \dot{y} & = & y(x - 1) & , & y(0) & = & 1, & \\ t_0 & = & 0.0 & , & t_e & = & 5.0 & , \quad m = 20, 50, 100 \end{array}$$

Man ermittle eine Schätzung für die Periode $T_0 > 0$.

AWA 3: Bahnkurve eines Satelliten: Die Bahnkurve eines Satelliten, der sich im Gravitationsfeld von Erde und Mond bewegt, wird für den Fall, dass die drei Himmelskörper sich in einer Ebene bewegen, durch die Gleichungen

$$y_1'' = y_1 + 2y_2' - \mu' \frac{y_1 + \mu}{D_1} - \mu \frac{y_1 - \mu'}{D_2} \tag{2}$$

$$y_2'' = y_2 - 2y_1' - \mu' \frac{y_2}{D_1} - \mu \frac{y_2}{D_2} \tag{3}$$

mit

$$\begin{aligned} D_1 &= \left((y_1 + \mu)^2 + y_2^2\right)^{3/2}, \\ D_2 &= \left((y_1 - \mu')^2 + y_2^2\right)^{3/2}, \\ \mu &= 0.012277471, \\ \mu' &= 1 - \mu \end{aligned}$$

beschrieben. Dabei ist (y_1, y_2) ein um den Ursprung rotierendes Koordinatensystem, in dem sich Mond und Erde an den festen Punkten $(1-\mu, 0)$ bzw. $(-\mu, 0)$ befinden. Für die Anfangswerte

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 0.994, \\ y_1'(0) &= 0, \\ y_2(0) &= 0, \\ y_2'(0) &= -2.0015851063, \\ x_{\text{end}} &= 17.0652165602 \end{aligned}$$

ergibt sich ein geschlossener sogenannter Arenstorf-Orbit, eine periodische Lösung mit der Periode x_{end}.

AWA 4: Modell für Nervenimpulse: Es bedeuten:

$x(t)$: Membranpotential
$y(t)$: Aktivierbarkeit der Nervenzelle
Die zugehörige AWA lautet:

$$\begin{array}{lllll} \dot{x} = 3(y + x - x^3/3 - 1.3) & , & x(0) & = & -1.03 \\ \dot{y} = -(x - 0.7 + 0.8y)/3 & , & y(0) & = & 2.16 \\ t_0 = 0 \quad , \quad t_e = 30 & , & m & = & 60 \end{array}$$

Literatur: R. Seydel, R. Bulirsch, *Vom Regenbogen zum Farbfernsehen* (1986), Springer Verlag.

Plotten und vergleichen Sie die Ergebnisse mit den verschiedenen Verfahren!

Prof. Dr. H. Maurer, Dipl. Math. Maike Schulte SS 07

Übungen zur Vorlesung „Höhere Numerische Mathematik“

Übungsblatt 10 , Abgabe: 22.06.2007 , 8.00 Uhr

Aufgabe 30: (4 Punkte)
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie: das Runge-Kutta Verfahren vierter Ordnung für die AWA

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x) \\ y(x_0) &= y_0, \quad x_0 \in [a,b] \end{aligned}$$

stimmt mit einer bekannten Integrationsformel überein.

Aufgabe 31: (4 Punkte)
Man gebe mittels Taylor-Entwicklung ein Einschritt-Verfahren p-ter Ordnung an für die AWA $y' = x + y$, $y(0) = 1$. Wie groß muss man $p \in \mathbb{N}_+$ wählen, damit $y(0.2)$ auf 4 Dezimalziffern korrekt berechnet wird bei Anwendung eines Schrittes mit $x_0 = 0$, $h = 0.2$.

Aufgabe 32: (4 Punkte)
Die skalare Gleichung zweiter Ordnung $y'' = f(y)$ wird als System

$$\begin{aligned} y' &= z, \\ z' &= f(y) \end{aligned}$$

geschrieben und approximiert durch

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + h\left(z_k + \frac{1}{4}h(k_1 + k_2)\right), \\ z_{k+1} &= z_k + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_2) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} k_1 &= f(y), \\ k_2 &= f\left(y + \frac{2}{3}hz + \frac{9}{2}h^2 k_1\right). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, das der lokale Diskretisierungsfehler für y $\mathcal{O}(h^3)$ ist.

Übungen zur Vorlesung „Höhere Numerische Mathematik“

Übungsblatt 11 , Abgabe: 29.06.2007 , 8.00 Uhr

Aufgabe 33: (4 Punkte)
Gegeben sei die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y''(x) + xy'(x) = 0$$

mit den Anfangswerten $y(1) = 1$ und $y'(1) = 2$.

(a) Transformieren Sie die Differentialgleichung auf ein System erster Ordnung. Geben Sie auch die transformierten Anfangsdaten an.

(b) Berechnen Sie mit dem expliziten Euler-Verfahren mittels zweier Schritte und mit dem Heun-Verfahren mittels eines Schritts eine Näherung für $y(2)$.

Aufgabe 34: (4 Punkte)
Gegeben sei das Mehrschrittverfahren (MSV)

$$y_{j+2} - (1+\alpha)y_{j+1} + \alpha y_j = \frac{h}{2}\left[(3-\alpha)f_{j+1} - (1+\alpha)f_j\right]$$

mit $f_j = f(x_j, y_j)$.

(a) Bestimmen Sie für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ die Ordnung des MSV's.

(b) Für welche α ist das MSV stabil?

Aufgabe 35: (4 Punkte)
Die Lösungen der Differenzengleichung

$$z_{j+2} = z_{j+1} + z_j, \quad j \geq 0,\ z_0 = 0,\ z_1 = 1$$

sind die Fibonacci-Zahlen.

a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differenzengleichung $z_{j+2} = z_{j+1} + z_j$ durch den Ansatz $z_j = c_1\lambda_1^j + c_2\lambda_2^j$, c_1, c_2, λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie dann die spezielle Lösung mit $z_0 = 0$, $z_1 = 1$.

b) Die Kapazität eines Informationskanals ist gegeben durch die Gleichung

$$C = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{j} \log z_j.$$

Berechnen Sie C.

Aufgabe 36: (4 Punkte)
Die AWA

$$\begin{aligned} y'(x) &= \mu y(x), \qquad x \geq 0,\ \mu \in \mathbb{R} \\ y(0) &= 1 \end{aligned} \tag{1}$$

werde durch die Methode

$$y_{k+2} - y_k = 2hf_{k+1} \tag{2}$$

gelöst.

a) Zeigen Sie, dass die Lösung y_k von (2) die Form

$$y_k = A(\lambda_1(h))^k + B(\lambda_2(h))^k$$

hat, wobei

$$\begin{aligned} \lambda_1(h) &= e^{\mu h} + \mathcal{O}(h^3) \\ \lambda_2(h) &= -e^{-\mu h} + \mathcal{O}(h^3) \end{aligned}$$

gilt.

b) Welches $\lambda_r(h)$ entspricht der Lösung von (1)?

c) Wie verhält sich die Approximation y_k, falls μ eine große negative Zahl ist?

Die Klausur findet am Mittwoch, den 4.7.2007 von 13:00 bis 16:00 Uhr in den Hörsälen M1 und M2 statt. Erlaubte Hilfsmittel sind ein nicht programmierbarer Taschenrechner und ein einseitig beschriebenes DinA4 Blatt Formelsammlung.

Das Verfahren von Maehly

Berechnet werden sollen alle Eigenwerte λ einer symmetrischen reellwertigen Tridiagonalmatrix

$$J_n = \begin{pmatrix} \delta_1 & \gamma_2 & & 0 \\ \gamma_2 & \delta_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \gamma_n \\ 0 & & \gamma_n & \delta_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}. \tag{1}$$

Analytisch würde man die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$p_n(\lambda) = \det(J_n - \lambda I_n) \tag{2}$$

bestimmen. Für die k-ten Abschnittsmatrizen gilt die 3-Term-Rekursion

$$\begin{aligned} p_0(\lambda) &= 1 \\ p_1(\lambda) &= \delta_1 - \lambda \\ p_k(\lambda) &= (\delta_k - \lambda)p_{k-1}(\lambda) - \gamma_k^2 p_{k-2}(\lambda), \qquad k = 2, \ldots, n. \end{aligned} \tag{3}$$

Sei nun $\gamma_k \neq 0$ für alle $k = 2, \ldots, n$ vorausgesetzt, wir definieren den Vektor

$$q(\lambda) := \begin{pmatrix} q_0(\lambda) \\ \vdots \\ q_{n-1}(\lambda) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \tag{4}$$

mit

$$\begin{aligned} q_0(\lambda) &:= 1 \\ q_k(\lambda) &:= \frac{(-1)^k p_k(\lambda)}{\gamma_2 \cdot \cdots \cdot \gamma_{k+1}}, \qquad k = 1, \ldots, n, \quad \gamma_{n+1} := 1. \end{aligned} \tag{5}$$

Dann ist die 3-Term-Rekursion (3) äquivalent zu der Gleichung

$$(J_n - \lambda I_n)q(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -q_n(\lambda) \end{pmatrix} \tag{6}$$

Beweis:
Schreibe Gleichung (6) aus:

$$\begin{pmatrix} \delta_1 - \lambda & \gamma_2 & & 0 \\ \gamma_2 & \delta_2 - \lambda & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \gamma_n \\ 0 & & \gamma_n & \delta_n - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0(\lambda) \\ \vdots \\ q_{n-1}(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -q_n(\lambda) \end{pmatrix}$$

Berechnung der linken Seite:

$$\begin{pmatrix} \delta_1-\lambda & \gamma_2 & & 0 \\ \gamma_2 & \delta_2-\lambda & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \gamma_n \\ 0 & & \gamma_n & \delta_n-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0(\lambda) \\ \vdots \\ q_{n-1}(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\delta_1-\lambda)q_0(\lambda)+\gamma_2 q_1(\lambda) \\ \gamma_2 q_0(\lambda)+(\delta_2-\lambda)q_1(\lambda)+\gamma_3 q_2(\lambda) \\ \vdots \\ \gamma_n q_{n-2}(\lambda)+(\delta_n-\lambda)q_{n-1}(\lambda) \end{pmatrix}$$

Für Zeile 1 gilt mit $q_0(\lambda)=1$ und $q_1(\lambda)=\frac{-p_1(\lambda)}{\gamma_2}$:

$$(\delta_1-\lambda)+\gamma_2\frac{-p_1(\lambda)}{\gamma_2}=(\delta_1-\lambda)-(\delta_1-\lambda)=0.$$

Für Zeile j gilt (unter Ausnutzung der Gleichung $q_k(\lambda)=\frac{(-1)^k p_k(\lambda)}{\gamma_2\cdot\dots\cdot\gamma_{k+1}}$ und der 3-Term-Rekursion (3) für den Term $p_j(\lambda)$):

$$\begin{aligned}
& \gamma_j q_{j-2}(\lambda)+(\delta_j-\lambda)q_{j-1}(\lambda)+\gamma_{j+1}q_j(\lambda) \\
= \quad & \gamma_j\frac{(-1)^{j-2}p_{j-2}(\lambda)}{\gamma_2\cdot\dots\cdot\gamma_{j-1}}+(\delta_j-\lambda)\frac{(-1)^{j-1}p_{j-1}(\lambda)}{\gamma_2\cdot\dots\cdot\gamma_j}+\gamma_{j+1}\frac{(-1)^j p_j(\lambda)}{\gamma_2\cdot\dots\cdot\gamma_{j+1}} \\
\overset{(3)}{=} \quad & \gamma_j^2\frac{(-1)^{j-2}p_{j-2}(\lambda)}{\gamma_2\cdot\dots\cdot\gamma_j}+(\delta_j-\lambda)\frac{(-1)^{j-1}p_{j-1}(\lambda)}{\gamma_2\cdot\dots\cdot\gamma_j}+\frac{(-1)^j\left[(\delta_j-\lambda)p_{j-1}(\lambda)-\gamma_j^2 p_{j-2}(\lambda)\right]}{\gamma_2\cdot\dots\cdot\gamma_j} \\
= \quad & \frac{(-1)^{j-2}}{\gamma_2\cdot\dots\cdot\gamma_j}\left[\gamma_j^2 p_{j-2}(\lambda)-(\delta_j-\lambda)p_{j-1}(\lambda)+(\delta_j-\lambda)p_{j-1}(\lambda)-\gamma_j^2 p_{j-2}(\lambda)\right] \\
= \quad & 0
\end{aligned}$$

Für die letzte Zeile gilt schließlich:

$$\begin{aligned}
\gamma_n q_{n-2}(\lambda)+(\delta_n-\lambda)q_{n-1}(\lambda) &= \gamma_n\frac{(-1)^{n-2}p_{n-2}}{\gamma_2\cdot\dots\cdot\gamma_{n-1}}+(\delta_n-\lambda)\frac{(-1)^{n-1}p_{n-1}}{\gamma_2\cdot\dots\cdot\gamma_n} \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{\gamma_2\cdot\dots\cdot\gamma_n}\left[(\delta_n-\lambda)p_{n-1}-\gamma_n^2 p_{n-2}\right] \\
&\overset{(3)}{=} \frac{(-1)^{n+1}}{\gamma_2\cdot\dots\cdot\gamma_n}p_n(\lambda) \;=\; -q_n(\lambda)
\end{aligned}$$

□

Also muss für die Eigenwerte λ_k von J_n gelten:

$$p_n(\lambda_k)=0 \qquad \Rightarrow \qquad q_n(\lambda_k)=0,$$

d.h. $(J_n - \lambda_k I_n)q(\lambda_k) = 0$ mit $q(\lambda_k) \neq 0$. Also ist $q(\lambda_k)$ Eigenvektor zum Eigenwert λ_k. Leite nun die Gleichung (6) nach λ ab:

$$-q(\lambda) + (J_n - \lambda I_n)q'(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -q_n'(\lambda) \end{pmatrix}$$

Auswertung in λ_k und Multiplikation von links mit $q(\lambda_k)^T$ ergibt

$$\begin{aligned} -q(\lambda_k)^T q(\lambda_k) + \underbrace{q(\lambda_k)^T (J_n - \lambda_k I_n)}_{=0,\text{ da } (J_n - \lambda_k I_n)q(\lambda_k)=0} q'(\lambda) &= q(\lambda_k)^T \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -q_n'(\lambda_k) \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad -q(\lambda_k)^T q(\lambda_k) &= -q_{n-1}(\lambda_k)q_n'(\lambda_k) \\ \Leftrightarrow \quad \underbrace{q(\lambda_k)^T q(\lambda_k)}_{=\sum_{i=0}^{n-1} q_i(\lambda_k)^2 > 0} &= q_{n-1}(\lambda_k)q_n'(\lambda_k) \end{aligned}$$

Insgesamt folgt mit $q_n'(\lambda) = \frac{(-1)^n p_n'(\lambda)}{\gamma_2 \cdots \gamma_n}$

$$0 < q_{n-1}(\lambda_k)q_n'(\lambda_k) = -\frac{p_{n-1}(\lambda_k)p_n'(\lambda_k)}{\gamma_2^2 \ldots \gamma_n^2},$$

insbesondere gilt demnach

$$p_n'(\lambda_k) \neq 0.$$

Damit ist λ_k einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms $p_n(\lambda)$! Es gilt also $\lambda_n < \cdots < \lambda_2 < \lambda_1$. Berechne die Ableitung $p_n'(\lambda_k)$ durch Ableitung der 3-Term-Rekursion (3):

$$\begin{aligned} p_0'(\lambda) &= 0, \\ p_1'(\lambda) &= -1, \\ p_k'(\lambda) &= -p_{k-1}(\lambda) + (\delta_k - \lambda)p_{k-1}'(\lambda) - \gamma_k^2 p_{k-2}'(\lambda), k = 2, \ldots, n. \end{aligned} \tag{7}$$

Maehly-Algorithmus:

Gesucht sind die Eigenwerte der Tridiagonalmatrix (1), diese werden durch die Berechnung der Nullstellen des char. Polynoms (2) bestimmt. Für Nullstellenberechnungen kennen wir das Newton-Verfahren, welches hier angewandt wird. Wir setzen voraus, dass $\gamma_j \neq 0$ für

$j = 2, \ldots, n$. Dann hat das Polynom $p_n(\lambda)$ nach obiger Rechnung n einfache Nullstellen $\lambda_n < \cdots < \lambda_2 < \lambda_1$. Also hat das Polynom

$$p_{n,j}(\lambda) := \frac{p_n(\lambda)}{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_j)}, \quad j = 1, \ldots, n-1 \tag{8}$$

die Nullstellen $\lambda_{j+1}, \ldots, \lambda_n$, welche wir mit dem Newton-Verfahren berechnen wollen. Leite dazu (8) nach λ ab:

$$p'_{n,j}(\lambda) = \frac{p'_n(\lambda)}{(\lambda - \lambda_1)\ldots(\lambda - \lambda_j)} - \frac{p_n(\lambda)}{(\lambda - \lambda_1)\ldots(\lambda - \lambda_j)} \sum_{i=1}^{j} \frac{1}{\lambda - \lambda_i}, \quad j = 1, \ldots, n-1. \tag{9}$$

Das Newton Verfahren für $p_{n,j}(\lambda) = 0$ zur Berechnung des Eigenwertes λ_{j+1} lautet

$$\begin{aligned} \lambda^{(k+1)} &= \lambda^{(k)} - \frac{p_{n,j}(\lambda^{(k)})}{p'_{n,j}(\lambda^{(k)})} && (10) \\ &= \lambda^{(k)} - \frac{p_n(\lambda^{(k)})}{p'_n(\lambda^{(k)}) - p_n(\lambda^{(k)}) \sum_{i=1}^{j} \frac{1}{\lambda - \lambda_i}}, \quad k = 0, 1, \ldots && (11) \end{aligned}$$

Ist also der Eigenwert λ_1 bekannt, können die weiteren berechnet werden. Der erste Eigenwert λ_1 wird durch das Newton-Verfahren als Nullstelle des charakteristischen Polynoms berechnet. Fehlt nur noch ein Startwert $\lambda^{(0)}$, den erhalten wir durch die Abschätzung

$$|\lambda_k| \leq \rho(J_n) \leq ||J_n||_\infty = \max_{k=1,\ldots,n} \{|\gamma_k| + |\delta_k| + |\gamma_{k+1}|\} =: \lambda^{(0)},$$

wobei $\gamma_1 = \gamma_{n+1} = 0$.
Die benutzen Polynome $p_n(\lambda), p'_n(\lambda)$ werden mit den Rekursionsformel (3) und (7) berechnet. Die Eigenvektoren $q(\lambda_k)$ berechnen sich durch Formel (4) bzw. (5).

Anmerkung:
Falls für ein k $\gamma_k = 0$ gilt, zerfällt die Matrix J_n in 2 Blöcke, auf die wiederum der Maehly-Algorithmus angewandt werden kann! Dies soll jedoch im Programm nicht berücksichtigt werden.

Integration mit Extrapolationsverfahren (speziell mit dem Romberg-Verfahren)

Ziel ist die numerische Berechnung des Integrals

$$\int_a^b f(x)dx, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

für eine gegebene Funktion f. Dazu seien äquidistante Stüztstellen $x_i = a + h \cdot i$ mit $h = \frac{b-a}{n}$, $i = 0, \ldots, n$ vorausgesetzt. Dann gilt mit der *Trapezregel* für das Intervall $[x_i, x_{i+1}]$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \cong \frac{h}{2} \left(f(x_i) + f(x_{i+1}) \right).$$

Wenden wir die Trapezregel auf alle Intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ an, so folgt die *zusammengesetzte Trapezregel*

$$\int_a^b f(x)dx \cong \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2} \left(f(x_i) + f(x_{i+1}) \right) =: T(h). \tag{1}$$

Bemerkung 1 *Die zusammengesetzte Trapezregel erfüllt die Fehlerungleichung*

$$\left| T(h) - \int_a^b f(x)dx \right| \le \frac{b-a}{12} h^2 \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| = \mathcal{O}(h^2)$$

und ist damit von zweiter Ordnung.

Man kann zeigen (siehe z.B. Stoer, Kapitel 3.2), dass $T(h)$ in geraden Potenzen von h entwickelt werden kann. D.h. es gibt eine Darstellung

$$T(h) = \tau_0 + \tau_1 h^2 + \tau_2 h^4 + \cdots + \tau_m h^{2m} + \alpha_{m+1}(h) h^{2m+2} \tag{2}$$

mit dem unbekannten Koeffizienten

$$\tau_0 = \int_a^b f(x)dx = \lim_{h \to 0} T(h)$$

und anderen Koeffizienten τ_i, $i = 1, \ldots, m$, die ebenfalls von h unabhängig sind und uns hier nicht weiter interessieren. Mit Hilfe des Extrapolations-Verfahrens wollen wir τ_0 bestimmen.

Idee der Extrapolation

Wir betrachten eine Folge $(h_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von $m+1$ Schrittweiten, sei

$$h_0 = b-a,\ h_1 = \frac{h_0}{n_1}, \dots, h_m = \frac{h_0}{n_m}, \quad n_i < n_{i+1},\ n_i \in \mathbb{N},\ i = 1, \dots, m.$$

Beispiel 1 *Eine mögliche Folge für die Schrittweiten bildet die Schrittweitenhalbierung. Diese Folge heißt Romberg-Folge:*

$$h_0 = b-a,\ h_i = \frac{h_0}{2^i}, \quad i = 0, 1, \dots,$$

also

$$h_0 = b-a,\ h_1 = \frac{h_0}{2},\ h_2 = \frac{h_1}{2},\ h_3 = \frac{h_2}{2}, \dots .$$

Mit Hilfe der Formel (1) bestimmen wir die Trapezsummen $T_{i,0} = T(h_i),\ i = 0, \dots, m$ für alle Schrittweiten h_i. Wichtig ist hier, dass z.B. die Auswertungen $f(a),\ f(b)$ in jeder Trapezsumme, also in der Trapezsumme für jedes h_i, vorkommen. Wünschenswert ist es, dass diese nicht jedes mal neu ausgerechnet werden, sondern der Wert von $T_{i-1,0}$ zur Berechnung von $T_{i,0}$ genutzt wird, um doppelte Auswertungen der Funktion f zu vermeiden. Nun kann das Polynom

$$\tilde{T}_{mm}(h) = a_0 + a_1 h^2 + \cdots + a_m h^{2m} \tag{3}$$

mit Hilfe einer Polynominterpolation bestimmt werden, wobei als Stützwerte die berechenbaren Trapezsummen dienen: $\tilde{T}_{mm}(h_i) = T(h_i)$, $i = 0 \dots, m$. Dann gilt

$$\tilde{T}_{mm}(0) = a_0 \cong \tau_0 \tag{4}$$

Beispiel 2 *Sei $m = 1$, d.h. es seien die Schrittweiten $h_0 = b-a$ und $h_1 = \frac{b-a}{2}$ gegeben. Dann folgt mit (1)*

$$\begin{aligned}
T(h_0) &= \sum_{i=0}^{0} \frac{h_0}{2}\left(f(x_i) + f(x_{i+1})\right) = \frac{h_0}{2}\left(f(a) + f(b)\right) \\
T(h_1) &= \sum_{i=0}^{1} \frac{h_1}{2}\left(f(x_i) + f(x_{i+1})\right) = h_1 \left(\frac{f(a)}{2} + f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{f(b)}{2}\right).
\end{aligned}$$

Es soll $\tilde{T}_{mm}(h_i) = T(h_i)$, $i = 0 \dots, m$ gelten. Mit der Interpolationsformel

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i L_i(x_i) = \sum_{i=0}^{n} f_i \prod_{k=0, k\neq i}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

für die Stützwerte $p(x_i) = f_i$ folgt (mit $x_i = h_i^2$, da nur gerade Exponenten von h in der Entwicklung (2) vorkommen) für das Polynom $\tilde{T}_{mm}(h)$ in $h = 0$:

$$\tilde{T}_{mm}(0) = \sum_{i=0}^{n} T(h_i) \prod_{k=0,k\neq i}^{n} \frac{-h_k^2}{h_i^2 - h_k^2}.$$

Also gilt insgesamt

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{mm}(0) &= T(h_0)\frac{-h_1^2}{h_0^2 - h_1^2} + T(h_1)\frac{-h_0^2}{h_1^2 - h_0^2} \\ &= \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right). \end{aligned}$$

Algorithmus

Soll das ganze nun programmiert werden, geht man etwas anders vor als in dem Beispiel. Man geht in einem Programm zur Romberg-Integration nach folgenden Punkten vor.

- Berechne die $T_{i,0}$ mit Hilfe der Formeln (1). Es ist wichtig darauf zu achten, dass die Funktionsauswertungen f nicht doppelt berechnet werden! Wie ist der genaue Zusammenhang zwischen $T(h_i)$ und $T(h_{i+1})$? Kann $T(h_{i+1})$ mit Hilfe von $T(h_i)$ zum Teil dargestellt werden? Welche Funktionsauswertungen müssen noch berechnet werden?

- Spaltenweise wird dann folgendes Tableau berechnet:

$$\begin{array}{c|cccc} h_0 & T_{00} & & & \\ h_1 & T_{10} & T_{11} & & \\ h_2 & T_{20} & T_{21} & T_{22} & \\ h_3 & T_{30} & T_{31} & T_{32} & T_{33} \\ \vdots & & & & \end{array}$$

  Dabei errechnen sich die $T_{i,k}$ für $k > 0$ durch die Rekursion (nach dem Algorithmus von Neville, siehe Numerik I, Polynominterpolation)

$$T_{i,k} = T_{i,k-1} + \frac{T_{i,k-1} - T_{i-1,k-1}}{\left(\frac{h_{i-k}}{h_i}\right)^2 - 1}, \quad 1 \leq k \leq i \leq m$$

- Um allgemeine Integranden f zuzulassen, müssen Zeiger genutzt werden. Ist eine Funktion f in einem m-File `f.m` gespeichert durch

```
function f = f(x)

f(x) = sin(x)
```

kann sie in einem Programm an eine andere Funktion (hier: `romberg.m`) durch die Syntax

```
zu_berechnender_Wert = romberg(@f,a,b,relerr)
```

übergeben werden, ohne dass f selbst in dem Programm definiert wird.